

## Impressum/Imprint (nur für Deutschland/ only for Germany)

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen Warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Coverbild: [www.purestockx.com](http://www.purestockx.com)

Verlag: VDM Verlag Dr. Müller Aktiengesellschaft & Co. KG

Dudweiler Landstr. 99, 66123 Saarbrücken, Deutschland

Telefon +49 681 9100-698, Telefax +49 681 9100-988, Email: [info@vdm-verlag.de](mailto:info@vdm-verlag.de)

Zugl.: Tallahassee, Florida State University, Ph.D. Diss., 2006

Herstellung in Deutschland:

Schaltungsdienst Lange o.H.G., Berlin

Books on Demand GmbH, Norderstedt

Reha GmbH, Saarbrücken

Amazon Distribution GmbH, Leipzig

ISBN: 978-3-639-13399-8

## Imprint (only for USA, GB)

Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek: The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at <http://dnb.dnb.de>. Any brand names and product names mentioned in this book are subject to trademark, brand or patent protection and are trademarks or registered trademarks of their respective holders. The use of brand names, product names, common names, trade names, product descriptions etc. even without a particular marking in this works is in no way to be construed to mean that such names may be regarded as unrestricted in respect of trademark and brand protection legislation and could thus be used by anyone.

Cover image: [www.purestockx.com](http://www.purestockx.com)

Publisher:  
VDM Verlag Dr. Müller Aktiengesellschaft & Co. KG

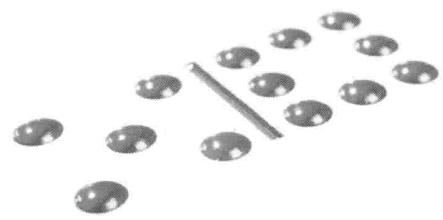
Dudweiler Landstr. 99, 66123 Saarbrücken, Germany  
Phone +49 681 9100-698, Fax +49 681 9100-988 Email: [info@vdm-publishing.com](mailto:info@vdm-publishing.com)

Copyright © 2009 by the author and VDM Verlag Dr. Müller Aktiengesellschaft & Co. KG and licensors  
All rights reserved. Saarbrücken 2009

Printed in the U.S.A.  
Printed in the U.K. by (see last page)  
ISBN: 978-3-639-13399-8

# Contents

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1     | Introduction   | 3  |
| 1.1   | Motivation . . . . .   | 3  |
| 1.2   | Dimension Reduction Techniques Used in Image Analysis . . . . .                          | 6  |
| 1.2.1 | Principal Component Analysis of Images . . . . .   | 6  |
| 1.2.2 | Independent Component Analysis of Images . . . . .                                       | 7  |
| 1.2.3 | Factor Analysis of Images . . . . .  | 8  |
| 1.3   | Our Approach . . . . .   | 10 |
| 2     | Problem Formulation  | 13 |
| 2.1   | General Statement of the Problem . . . . .   | 13 |
| 2.2   | Kurtosis . . . . .   | 14 |
| 2.2.1 | Analytical Solution for $n = 2, d = 1$ . . . . .   | 15 |
| 2.3   | Sparse ness . . . . .  | 19 |
| 2.4   | Entropy . . . . .  | 20 |
| 2.5   | Convex Combinations of Functions: Pairs of Kurtosis, Sparse ness, and Variance . . . . . | 21 |
| 2.5.1 | Kurtosis and Variance . . . . .  | 21 |
| 2.5.2 | Kurtosis and Sparse ness . . . . .   | 22 |
| 2.5.3 | Sparse ness and Variance . . . . .   | 22 |
| 3     | Differential Geometry of Stiefel and Grassmann Manifolds: Background                     | 24 |
| 3.1   | Differentiable Manifolds . . . . .   | 24 |
| 3.2   | Calculus on Manifolds . . . . .  | 26 |
| 3.3   | Gradient Flows on Manifolds . . . . .  | 29 |
| 3.4   | Stochastic Gradient Flow . . . . .   | 31 |
| 4     | Gradient-Based Optimization  | 32 |
| 4.1   | Deterministic Gradient on Grassmann Manifolds . . . . .                                  | 32 |



Evgenia Rubinshtein

# Optimal Linear Representations of Images Under Diverse Criteria

Geometric Tools for Finding  
Linear Projections

